ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐẶNG THỊ THU HIỀN

TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA TRÊN MIỀN HÌNH DẢI

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan, đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Ngân. Nội dung trong luận văn là trung thực, không sao chép. Tôi cam đoan rằng các nguồn tài liệu tham khảo đã được trích dẫn đầy đủ, mọi sự giúp đỡ để thực hiện luận văn đã được cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2019
Tác giả

ĐẶNG THỊ THU HIỀN

Lời cảm ơn

Để hoàn thành luận văn tốt nghiệp và kết thúc khóa học, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới Trường Đại học Sư Phạm- Đại học Thái Nguyên đã tạo cho chúng tôi có một môi trường học tập, nghiên cứu tuyệt vời.

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thị Ngân, đã trực tiếp hướng dẫn, truyền đạt kinh nghiệm quý báu cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Xin gửi lời cảm ơn đến tập thể giảng viên Khoa Toán - Trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và Viện Toán học đã tận tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện cho chúng tôi trong quá trình học và thực hiện luận văn tốt nghiệp.

Do thời gian và kiến thức chuyên môn của bản thân còn hạn chế nên luận văn của tôi không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2019

Tác giả

ĐẶNG THỊ THU HIỀN

Mục lục

Lời nói đầu **1**

Chương 1 Kiến thức cơ sở **3**

1.1 Hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính 3

1.2 Biến đổi Fourier 4

1.3 Không gian hàm 4

1.3.1 Không gian $H^s(\mathbb{R}), H^s(\Omega), H^s_o(\Omega)$ 4

1.3.2 Các không gian Sobolev véc tơ 5

1.4 Toán tử giả vi phân 7

Chương 2 Tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân đối với bài toán biên cho phương trình song điều hòa trên miền hình dải **11**

2.1 Đặt bài toán 11

2.2 Tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân 16

2.3 Biến đổi về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính . . 23

2.3.1 Biến đổi về hệ phương trình tích phân với hạch logarit 24

2.3.2 Biến đổi về hệ phương trình vô hạn đại số tuyến tính . 26

Kết luận **30**

Tài liệu tham khảo **31**

Lời nói đầu

Bài toán biên cho phương trình song điều hòa trên miền hình dải đã được nhiều tác giả trên thế giới nghiên cứu đến. V. B. Zelentsov đã trình bày những vấn đề về đĩa Kirchhoff - Love chưa thực hiện được trên một miền hình dải, dưới dấu hiệu của một bao hàm cứng nối với một trong các biên của đĩa khi biên khác của đĩa được cố định. Bài toán đưa về bài toán tìm nghiệm tích - chập của phương trình tích phân loại một trên khoảng hữu hạn với hạch đều. Từ tính chất về hạch của phương trình tích phân ta có thể suy ra nghiệm của phương trình không kì dị khả tích. A. I. Fridman và S. D. Eidelman đã xét một số bài toán biên cho phương trình song điều hòa trên miền hình dải. Gần đây, định lý về tính duy nhất cho nghiệm không âm của bài toán đã được chứng minh.

Mục đích của đề tài là nghiên cứu bài toán biên cho phương trình song điều hòa trên miền hình dải. Bài toán biên trên miền hình dải với giả thiết được giới hạn bởi $y = 0, y = h$ với điều kiện ngàm được cho trên khoảng $|x| \leqslant a$ và điều kiện gối tựa $|x| > a$. Sử dụng phép biến đổi Fourier đưa bài toán biên của phương trình song điều hòa trên miền hình dải về hệ phương trình cặp tích phân. Nghiên cứu tính tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình cặp tích phân được thiết lập trong không gian Sobolev. Ngoài ra luận văn cũng đưa ra phương pháp biến đổi hệ phương trình cặp tích phân về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Luận văn bao gồm: Mở đầu, hai chương nội dung, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ sở về không gian hàm và toán tử giả vi phân, hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Chương 2: Tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân đối với bài toán biên cho phương trình song điều hòa trên miền hình dải. Đưa ra phương pháp biến đổi hệ phương trình cặp tích phân về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2019

Tác giả

ĐẶNG THỊ THU HIỀN

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở là hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính, biến đổi Fourier, các không gian hàm và toán tử giả vi phân.

1.1 Hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.1. [6] Hệ phương trình có dạng

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, ...), \tag{1.1}$$

trong đó các số x_i là xác định trước, được gọi là hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Khi ta thay $x_i, i = 1, 2...$ vào vế phải của (1.1) được các chuỗi hội tụ đồng thời thỏa mãn các đẳng thức thì $x_i, i = 1, 2..$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1).

Định nghĩa 1.2. [3] Hệ vô hạn (1.1) được gọi là chính quy nếu

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1 \quad (i = 1, 2, ...), \tag{1.2}$$

được gọi là hoàn toàn chính quy nếu

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant 1 - \theta < 1, \quad 0 < \theta < 1, \quad (i = 1, 2, ...). \tag{1.3}$$

Nếu bất đẳng thức (1.2) (hoặc (1.3)) đúng với $i = N + 1, N + 2, ...$, thì hệ (1.1) được gọi là tựa tựa chính quy (hoặc tựa hoàn toàn chính quy).

1.2 Biến đổi Fourier

Định nghĩa 1.3. [4],[5] Kí hiệu $S = S(\mathbb{R})$ là không gian các hàm cơ bản, F là phép biến đổi Fourier được xác định bởi

$$\widehat{g}(\zeta) = F[g](\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix\zeta}dx,$$

Định nghĩa 1.4. [4],[5] Kí hiệu $S' = S(\mathbb{R})$ là không gian các hàm suy rộng, F^{-1} là phép biến đổi Fourier ngược được xác định bởi

$$\breve{g}(\zeta) = F^{-1}[g](\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\zeta}dx.$$

Ký hiệu $< g, \psi >$ là giá trị của hàm suy rộng $g \in S'$ trên hàm cơ bản $\psi \in S$, ngoài ra $(g, \psi) :=< g, \overline{\psi} >$.

1.3 Không gian hàm

1.3.1 Không gian $H^s(\mathbb{R}), H^s(\Omega), H^s_o(\Omega)$

Định nghĩa 1.5. [5] Cho $H^s := H^s(\mathbb{R})(s \in \mathbb{R})$ trong không gian Sobolev - Slobodeskii được định nghĩa như bao đóng của tập hợp $C^\infty_o(\mathbb{R})$ của hàm vi phân vô hạn với chuẩn được xác định

$$||v||_s := \Big[\int_{-\infty}^{\infty}(1+\zeta^2)^s|\widehat{v}(\zeta)|^2d\zeta\Big]^{1/2} < \infty, \quad \widehat{v} = F[v]. \tag{1.4}$$

Không gian H^s là không gian Hilbert với tích vô hướng sau

$$(u, v)_s := \int_{-\infty}^{\infty}(1+\zeta^2)^s\widehat{u}(\zeta)\overline{\widehat{v}(\zeta)}d\zeta. \tag{1.5}$$

Định nghĩa 1.6. [5] Giả sử Ω là một khoảng hoặc hệ các khoảng không giao nhau trong $\mathbb{R}$. Không gian con của $H^s(\mathbb{R})$ bao gồm hàm $v(x)$ với giá trong $\overline{\Omega}$ được kí hiệu là $H^s_o(\Omega)$ và được định nghĩa như chuẩn của $C^\infty_0(\Omega)$.

Định nghĩa 1.7. [5] Giả sử $h \in H^s(\mathbb{R})$. Hạn chế của h trên Ω được kí hiệu là h_Ω, ta có

$$\langle h_\Omega, \lambda\rangle = \langle h, \lambda\rangle \quad \text{với mọi} \quad \lambda \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tập hợp các hạn chế của các hàm thuộc $H^s(\mathbb{R})$ trên Ω kí hiệu là $H^s(\Omega)$. Chuẩn trong $H^s(\Omega)$ được xác định bởi công thức

$$||h||_{H_s(\Omega)} = \inf_l ||lh||_s,$$

trong đó cận dưới đúng có thể lấy theo các thác triển $lh \in H^s(\mathbb{R}), h \in H^s(\Omega)$.

1.3.2 Các không gian Sobolev véc tơ

Giả sử X là không gian tôpô tuyến tính. Ta kí hiệu X và X^2 là tích trực tiếp của hai không gian. Tôpô trong X^2 được xác định là tôpô thường của tích trực tiếp. Ta sẽ dùng chữ in đậm để biểu thị các hàm véc tơ và ma trận. Kí hiệu véc tơ $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, và

$$\mathbf{S}^2 = S \times S, \qquad (\mathbf{S}')^2 = S' \times S'.$$

Với $\mathbf{v} \in (S')^2, \boldsymbol{\psi} \in S^2$, ta đặt

$$< \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} >= \sum_{i=1}^{2} < v_i, \psi_i > .$$

Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược của véc tơ $\mathbf{v} \in (S')^2$ là véc tơ $\widehat{\mathbf{v}} = F^{\pm 1}[\mathbf{v}] = (F^{\pm 1}[v_1], F^{\pm 1}[v_2])^T$, xác định bởi đẳng thức

$$\begin{aligned} &< F[\mathbf{v}], \boldsymbol{\psi} >=< \mathbf{v}, F[\boldsymbol{\psi}] >, \\ &< F^{-1}[\mathbf{v}], \boldsymbol{\psi} >= \frac{1}{2\pi} < \mathbf{v}, F[\boldsymbol{\psi}](-x) >, \boldsymbol{\psi} \in S^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Giả sử H^{s_i}, $H_o^{s_i}(\Omega)$, $H^{s_i}(\Omega)$ là những không gian Sobolev, trong đó $i = 1, 2$, Ω là một khoảng hoặc hệ các khoảng không giao nhau trong $\mathbb{R}$. Ta đặt

$$\begin{aligned} &\vec{s} = (s_1, s_2)^T, \mathbb{H}^{\vec{s}} = H^{s_1} \times H^{s_2}, \\ &\mathbb{H}_o^{\vec{s}}(\Omega) = H_o^{s_1}(\Omega) \times H_o^{s_2}(\Omega), \\ &\mathbb{H}^{\vec{s}}(\Omega) = H^{s_1}(\Omega) \times H^{s_2}(\Omega). \end{aligned}$$

Tích vô hướng và chuẩn trong $H^{\vec{s}}$ và $H_o^{\vec{s}}(\Omega)$ được xác định bởi công thức

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\vec{s}} = \sum_{i=1}^{2}(u_i, v_i)_{s_i}, ||\mathbf{v}||_{\vec{s}} = \Big(\sum_{i=1}^{2} ||v_i||_{s_i}^2\Big)^{1/2},$$

trong đó $||v_i||_{s_i}$ và $(u_i, v_i)_{s_i}$ lần lượt được xác định bởi công thức (1.4) và (1.5). Chuẩn trong $\mathbb{H}^{\vec{s}}(\Omega)$ được định nghĩa bởi công thức

$$||v||_{\mathbb{H}^{\vec{s}}(\Omega)} := \Big(\sum_{i=1}^{2} \inf_{l_i} ||l_i v_i||_{s_i}^2\Big)^{1/2},$$

trong đó l_i là toán tử suy rộng của $v_i \in H^{s_i}(\Omega)$ từ Ω vào $\mathbb{R}$.

Định lý 1.1. *[1] Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}, \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{H}^{\vec{s}}(\Omega), \boldsymbol{g} \in \mathbb{H}^{-\vec{s}}(\Omega)$ và $\boldsymbol{lg} = (l_1 g_1, l_2 g_2)^T$ là một thác triển của $\boldsymbol{g}$ từ Ω đến $\mathbb{R}$ thuộc vào $\mathbb{H}^{-\vec{s}}(\mathbb{R})$. Khi đó tích phân*

$$[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}] := (\boldsymbol{lg}, \boldsymbol{v})_o := \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{l_i g_i}(\zeta)\overline{\widehat{v_i(\zeta)}} d\zeta, \tag{1.7}$$

không phụ thuộc vào việc chọn thác triển $\boldsymbol{lg}$ *. Do đó, công thức này xác định hàm tuyến tính trên $\mathbb{H}_o^{\vec{s}}(\Omega)$. Ngược lại, với mỗi hàm tuyến tính $\Psi(\boldsymbol{v})$ liên tục trên $\mathbb{H}_o^{\vec{s}}(\Omega)$ tồn tại $\boldsymbol{g} \in \mathbb{H}^{-\vec{s}}(\Omega)$ sao cho $\Psi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}]$ và $||\Psi|| = ||\boldsymbol{g}||_{\mathbb{H}^{-\vec{s}}(\Omega)}$.*

Chứng minh. Lấy **l'g** là một thác triển khác của hàm **g**. Khi đó ta có **lg - lg' = 0** trên Ω, tức là

$$(\mathbf{lg} - \mathbf{l'g},\mathbf{z})_o = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{z} \in (C_o^{\infty}(\Omega))^2. \tag{1.8}$$

Do $(C_o^{\infty}(\Omega))^2$ là tập trù mật trong $\mathbb{H}_o^{\vec{s}}(\Omega)$, nên từ (1.8) ta có

$$(\mathbf{lg} \text{ - } \mathbf{l'g},\mathbf{v})_o = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}_o^{\vec{s}}(\Omega),$$

Tức là $(\mathbf{l'g},\mathbf{v})_o = (\mathbf{lg},\mathbf{v})_o$. Do đó, tích phân trong (1.7) không phụ thuộc vào cách chọn mở rộng **lg**. Từ đó, chúng ta được

$$|(\mathbf{lg},\mathbf{v})_o| \leqslant ||\mathbf{v}||_{\vec{s}}.||\mathbf{lg}||_{-\vec{s}}.$$